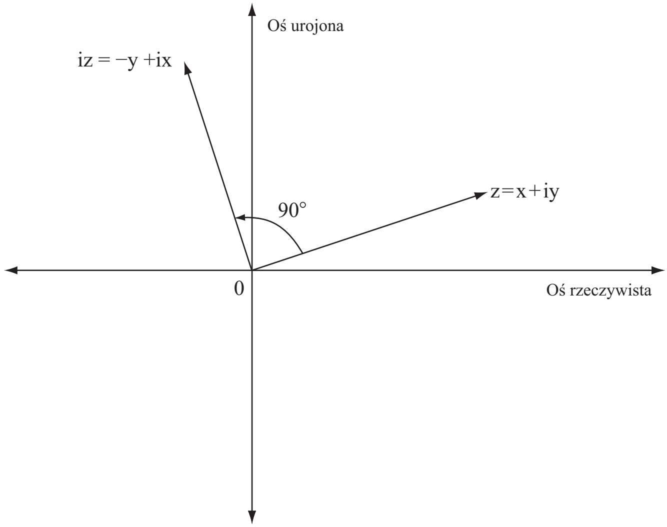

Rysunek 15. Mnożenie przez *i* obraca liczbę zespoloną o kąt prosty

Rodzaje działań, które wykorzystują te dwie cechy, są znane jako *liniowe* i mają ogromne znaczenie w całej matematyce. Warto tu tylko zwrócić uwagę na fakt, że efekt takiego działania L jest określony przez jego działanie na dwóch punktach (1, 0) oraz (0, 1). Przypuśćmy więc, że $L(1, 0) = (a, b)$ oraz $L(0, 1) = (c, d)$. Wtedy dla każdego punktu (x, y) mamy $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$. Wykorzystując cechy operacji liniowych, otrzymujemy:

$$L(x, y) = L(x(1, 0) + y(0, 1)) = xL(1, 0) + yL(0, 1) =$$
$$= x(a, b) + y(c, d) = (ax, bx) + (cy, dy) = (ax + cy, bx + dy).$$

Te informacje można podsumować za pomocą czegoś, co jest znane jako *równanie macierzowe*:

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax + cy, bx + dy).$$

Nakreśliliśmy tu przykład mnożenia macierzy, który pokazuje ogólny sposób jego przeprowadzenia. *Macierz* to prostokątna tablica wierszy i kolumn złożonych z liczb. Jednak macierze reprezentują inny rodzaj obiektu dwuwymiarowego, a co więcej, przenikają niemal całą wyższą matematykę, w postaci czystej i stosowanej. Reprezentują cały korpus algebry, a duża część współczesnej matematyki dąży do przedstawienia się przez macierze, które okazały się tak przydatne. Dwie macierze o tej samej liczbie wierszy i kolumn są dodawane pozycja po pozycji. Aby na przykład znaleźć wpis w drugim wierszu i trzeciej kolumnie sumy dwóch macierzy, po prostu dodajemy elementy umieszczone w odpowiednim miejscu w obu dodawanych macierzach. Jednak to mnożenie macierzy nadaje tej tematyce nowy i ważny charakter, a sposób jego przeprowadzenia wypłynął samoistnie w poprzednim przykładzie – każdy element w iloczynie macierzy jest tworzony przez wykorzystanie *iloczynu skalarnego* wiersza pierwszej macierzy z kolumną drugiej, co oznacza, że element jest sumą odpowiednich iloczynów, gdy wiersz pierwszej macierzy jest umieszczany na kolumnie drugiej.

Macierze spełniają wszystkie prawa algebry poza przemiennością mnożenia, co oznacza, że dla dwóch macierzy A i B *nie jest* ogólnie prawdą $AB = BA$. Jednak mnożenie macierzy jest *łączne*, co oznacza, że iloczyny dowolnej długości można zapisać w sposób jednoznaczny bez potrzeby stosowania żadnych nawiasów.

Przekształceniami liniowymi na płaszczyźnie są zwykle obroty wokół środka układu, odbicia względem linii przechodzących przez środek, powiększenia i zmniejszenia względem środka układu oraz tak zwane *ścinanie*, które przesuwa punkty równolegle względem ustalonej osi o wielkość proporcjonalną do ich odległości od osi w sposób podobny do tego, w jaki strony książki przesuwają się jedna po drugiej. Na każdy ciąg takich przekształceń można wpłynąć przez pomnożenie przez siebie wszystkich odpowiednich macierzy, aby uzyskać jedną macierz, która ma taki sam efekt netto jak wszystkie przekształcenia wykonane po kolei. Wiersze wynikowej macierzy są